ΘΕΜΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ – DE MOIVRE – N-ΟΣΤΕΣ ΡΙΖΕΣ

1) Ποια η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών:

i. $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ii. $\frac{(\sqrt{3}-i)^7}{(1+i)^{10}}$

Έπειτα για το (i) να υπολογιστεί η παράσταση:

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}$.

ΛΥΣΗ

i) $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i =$

$= (\cos\frac{\pi}{4}) + (\sin\frac{\pi}{4})i$

ii) Έστω, $z_1 = \sqrt{3} - i$ και $z_2 = 1+i$

$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ και $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Έτσι, γράφουμε τους z_1 και z_2 στην τριγ. μορφή:

$z_1 = |z_1|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ & $z_2 = |z_2|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Έτσι, $z_1 = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$ & $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right) \text{ και} \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right) \end{cases}$$

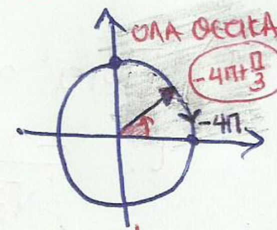
Επομένως,

$$\frac{(\sqrt{3}-1)^7}{(1+i)^{10}} = \frac{2^7\cdot\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)^7}{(\sqrt{2})^{10}\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)^{10}} \overset{\text{De Moivre}}{=\!=}$$

$$= 4 \cdot \frac{\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{10\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{10\pi}{4}\right)}$$

Διαίρεση μιγαδικών τριγωνομετρ. μορφής.

Γεωμετρικά



$$= 4 \cdot \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{6} - \frac{10\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{6} - \frac{10\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{-15\pi + 4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-15\pi + 4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\cos\left(-5\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-5\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\cos\left(-4\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-4\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Επίσης, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)^{-6} \overset{\text{De Moivre}}{=}$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}(-6)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}(-6)\right) =$$

$$= \cancel{\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}^{\,0} + i\, \eta\mu\left(-\frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= i \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2} = i$$

2) Ποιο το σύνολο των μιγαδικών για τα οποία ισχύει η ισότητα: $Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$;

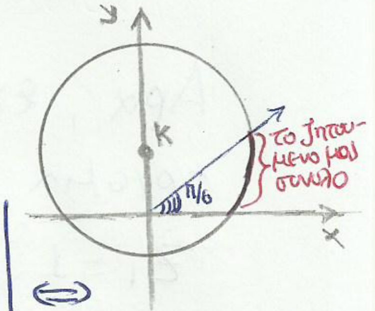
ΛΥΣΗ

Έστω $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

Τοτε, $\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2} i$

Άρα, $\frac{z-1}{z+1} = A+Bi$ με $A = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}$ & $B = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$

Δίνεται ότι $Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6} \Longleftrightarrow$



$\Longleftrightarrow \begin{cases} \tan\frac{\pi}{6} = \frac{B}{A} \\ A, B > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2y}{x^2+y^2-1} \\ y>0 \ (\& \ x^2+y^2>1) \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-\sqrt{3})^2 = 2^2 \\ y>0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ κύκλος κέντρου $K(0,\sqrt{3})$ και ακτίνας $\rho=2$

Άρα, το σύνολο εικόνων του z είναι το τόξο του παραπάνω κύκλου <u>πάνω</u> από τον $x'x$.

- Μπορείτε να κάνετε εξάσκηση για την εξίσωση $Arg(2z+i) = \frac{\pi}{2}$ ομοίως με την παραπάνω άσκηση

3) Έστω το σύνολο $A = \{z : z^2 = \bar{z}\}$
Να βρεθεί το μέτρο και το βασικό όρισμα του $z \neq 0$ με $z \in A$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $z \in A$ με $z = x+iy \neq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$(x+iy)^2 = x-iy \Leftrightarrow (x^2-y^2-x) + y(2x+1)i = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2-x=0 \\ y(2x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-x=0 \\ y=0 \text{ ή } x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

- $y=0 \to x^2-x=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=1$
- $x=-\frac{1}{2} \to \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-y^2=0 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Αρα, εχουμε $z=0$ (Απορ. διότι δεν ορίζεται το ορισμα για $z=0$, άλλωστε $z\neq 0$)

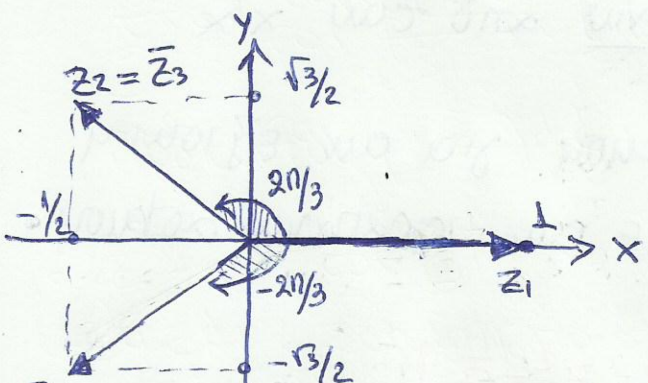
$z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

1) $z_1=1 \Rightarrow |z_1|=1$ & $Arg(z_1)=0$

2) $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |z_2|=1$ & $Arg(z_2)=\frac{2\pi}{3}$

3) $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |z_3|=1$ & $Arg(z_3)=-\frac{2\pi}{3}$

(αυτό διότι $z_2=\overline{z_3}$ ή και γεωμετρικά)



4) Να λυθουν οι παρακάτω εξισωσεις:

α. $z^3=-i$, β. $z^6+64=0$, δ. $z^6-(1+i)z^3+i=0$

ΛΥΣΗ

α. $z^3=-i=0-1\cdot i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Έτσι, λοιπόν η εξίσωση αυτή έχει 3 διαφορετικές ρίζες που θα δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right),\ k=0,1,2$$

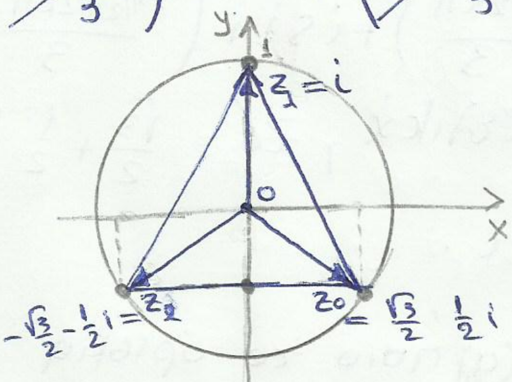
(<u>Παρατήρηση:</u> Οι εικόνες των μιγαδικών $z_k,\ \forall k=0,1,2$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt[3]{1}=1$)

Έτσι, προκύπτουν οι εξής ρίζες:

$$z_0 = \cos\left(\cancel{\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}}^{-\pi/6}\right)+i\sin\left(\cancel{\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}}^{-\pi/6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_1 = \cos\left(\cancel{\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}}^{\pi/2}\right)+i\sin\left(\cancel{\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}}^{\pi/2}\right)=0+i$$

$$z_2 = \cos\left(\cancel{\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}}^{7\pi/6}\right)+i\sin\left(\cancel{\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}}^{7\pi/6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$



β. Να γίνει ως άσκηση.

γ. Έχουμε, $z^6-(1+i)z^3+i=0$

Θέτουμε $z^3=w$

Παίρνουμε λοιπόν: $\boxed{w^2-(1+i)w+i=0}$

όπου $\Delta = (1-i)^2$

και ρίζες:

$$w_1 = \frac{(1+i)+(1-i)}{2} = 1 \quad \& \quad w_2 = \frac{(1+i)-(1-i)}{2} = i$$

Έτσι, $w = z^3 = 1$ ή $w = z^3 = i$

Καλούμαστε λοιπόν να λύσουμε δύο εξισώσεις

- $z^3 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ με ρίζες

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \quad \text{για } k=0,1,2$$

Προκύπτουν τελικά, $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- $z^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ με ρίζες

$$z_k' = \cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right) \quad \text{για } k=0,1,2$$

Προκύπτουν τελικά, $z_0' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1' = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

και $z_2' = -i$.

5) Έστω $z = 1-i$, τότε (α) ποιο το όρισμα των μιγαδικών

$z, z^2, z^3, \dots, z^8$;

(β). Αν $\lambda \in \mathbb{N}$, ποιο το όρισμα του μιγαδικού: $z^{8\lambda}$;

(γ) Ποιο το όρισμα του z^{1872};

ΛΥΣΗ

(α). $|z| = \sqrt{2} \leadsto \sqrt{2}\cdot\frac{z}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) =$

$= \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)i\right) \leftarrow$ τριγ. μορφή του z

Άρα $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Ένα όρισμα λοιπόν για το μιγαδικό z είναι

το $\arg(z)=-\frac{\pi}{4}$. Έτσι, τα αντίστοιχα ορίσματα

για τους $z^2, z^3, \dots, z^8$ είναι (από De Moivre)

$-\frac{2\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \dots, -\frac{8\pi}{4}$

(β). Το z^8 έχει (ένα από τα ορίσματα) όρισμα

$-\frac{8\pi}{4}=\arg(z^8) \Rightarrow \arg(z^8)=-2\pi \Rightarrow \arg(z^8)=0$

άρα ένα όρισμα για τον $z^{8\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{N}$ είναι

$\arg(z^{8\lambda})=\arg((z^8)^\lambda)=\lambda(\arg(z^8))=0$

$\underbrace{z^8\cdot z^8\cdots z^8}_{\lambda \text{ φορές}}$ $\arg(z^{8\lambda})=\lambda\arg(z^8)$

(γ) $z^{1972}=(z^8)^{246}\cdot z^4$

Έτσι, $\arg(z^{1972})=-\pi$.

διότι (από (β)): $\arg((z^8)^{264})=0$

αλλά $\arg(z^4)=-\frac{4\pi}{4}=-\pi$.

τότε $\arg(z^{1972})=\arg((z^8)^{246}\cdot z^4)=0-\pi=-\pi$

(Το γινόμενο δύο μιγαδικών στο $\mathbb{C}$ μας δίνει σαν αποτελεσμα όρισματος το αθροισμα των επιμέρους ορισμάτων)

6) α. Να υπολογιστεί το άθροισμα και το γινόμενο των ν-οστών ριζών της μονάδας

β. Νδο:

- $\eta\mu \frac{2\pi}{\nu} + \eta\mu \frac{4\pi}{\nu} + \eta\mu \frac{6\pi}{\nu} + \dots + \eta\mu \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} = 0 \quad (1)$
- $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\nu} + \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{\nu} + \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{\nu} + \dots + \sigma\upsilon\nu \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} = 1 \quad (2)$

ΛΥΣΗ

α. Οι ν-οστές ρίζες της μονάδας, είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $z^\nu = 1$, δηλαδή οι μιγαδικοί

$z_k = \sigma\upsilon\nu \frac{2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu \frac{2k\pi}{\nu}$, $k = 0, 1, \dots, \nu-1$ όπου

αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο

Θεωρώντας λοιπόν $z_1 = w$, $z_2 = w^2, \dots, z_k = w^k$

άρα οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης δεν είναι άλλες από τις εξής: $1, w, w^2, \dots, w^{\nu-1}$

▷ $1 + w + w^2 + \dots + w^{\nu-1} = \frac{w^\nu - 1}{w - 1} = 0$ (διότι $w^\nu = 1$)

▷ $1 \cdot w \cdot w^2 \cdots w^{\nu-1} = w^{1+2+\dots+\nu-1} = w^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} =$

$= \left(\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\nu} + i\,\eta\mu \frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$ De Moivre

$= \sigma\upsilon\nu((\nu-1)\pi) + i\,\eta\mu((\nu-1)\pi)$ De Moivre

$= (\sigma\upsilon\nu\,\pi + i\,\cancel{\eta\mu\pi}^{\,0})^{(\nu-1)} = (-1)^{\nu-1} = \begin{cases} 1, & \nu \text{ περιττός} \\ -1, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$

β. Αφού: $1 + w + w^2 + \dots + w^{\nu-1} = 0$ τότε

$1 + \left(\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\nu} + i\,\eta\mu \frac{2\pi}{\nu}\right) + \left(\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{\nu} + i\,\eta\mu \frac{4\pi}{\nu}\right) + \dots + \left(\sigma\upsilon\nu \frac{(2\nu-1)\pi}{\nu} + i\,\eta\mu \frac{(2\nu-1)\pi}{\nu}\right) = 0$

$\Rightarrow$ Εξισώνουμε πραγμ. με πραγμ. και φανταστ. με φανταστ. και προκύπτουν οι εξισώσεις (1) & (2).